Regressionsmodelle für kategoriale abhängige Variablen

Hausaufgabe 1

1. Zeigen Sie: $x^0 = 1$
2. Gegeben $y = \frac{e^{\mathbf{Xb}}}{1+e^{\mathbf{Xb}}}$. Ermitteln Sie $1 - y$.
3. Formen Sie um:
$$y = \frac{e^{\mathbf{Xb}}}{1 + e^{\mathbf{Xb}}} \quad \text{zu} \quad \ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = \mathbf{Xb}$$
4. Erstellen Sie den Graphen von
$$f(\mu, y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(y_i - \mu)^2}{2}\right)$$
für $\mu = 1, 2, 3$ und $y_i = [-4, 4]$
5. Ermitteln Sie $\ln f(\mu, y_i)$:
$$f(\mu, y_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(y_i - \mu)^2}{2}\right)$$
6. Ermitteln Sie: $\frac{\partial \ln[f(\mu, y_i)]}{\partial \mu}$

Regressionsmodelle für kategoriale abhängige Variablen

Lösungen zu Hausaufgabe 1

1. Zeigen Sie: $x^0 = 1$

   Lösung:

$$x^0 = x^{n-n} = \frac{x^n}{x^n} = 1$$

2. Gegeben $y = \frac{e^{\mathbf{Xb}}}{1+e^{\mathbf{Xb}}}$. Ermitteln Sie $1 - y$.

   Lösung:

$$\begin{aligned} 1 - y &= 1 - \frac{e^{\mathbf{Xb}}}{1 + e^{\mathbf{Xb}}} \\ &= \frac{1 + e^{\mathbf{Xb}}}{1 + e^{\mathbf{Xb}}} - \frac{e^{\mathbf{Xb}}}{1 + e^{\mathbf{Xb}}} \\ &= \frac{1}{1 + e^{\mathbf{Xb}}} \end{aligned}$$

3. Formen Sie um:

$$y = \frac{e^{\mathbf{Xb}}}{1 + e^{\mathbf{Xb}}} \quad \text{zu} \quad \ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = \mathbf{Xb}$$

   Lösung:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{y}{y-1}\right) &= \ln\left(\frac{\frac{e^{\mathbf{Xb}}}{1+e^{\mathbf{Xb}}}}{\frac{1}{1+e^{\mathbf{Xb}}}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{e^{\mathbf{Xb}} \times \left(1 + e^{\mathbf{Xb}}\right)}{\left(1 + e^{\mathbf{Xb}}\right) \times 1}\right) \\ &= \ln e^{\mathbf{Xb}} = \mathbf{Xb} \end{aligned}$$

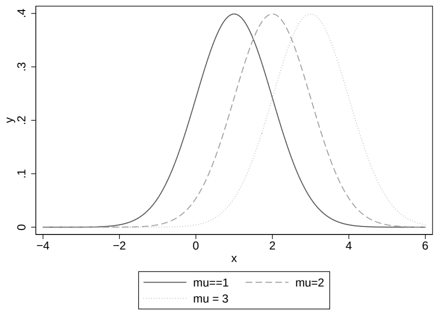
4. Erstellen Sie den Graphen von

$$f(\mu, y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(y_i - \mu)^2}{2}\right)$$

   für $\mu = 1, 2, 3$ und $y_i = [-4, 4]$

Lösung: `gr twoway ///`

```
(function y =  1/(sqrt(2*_pi))*exp(-((x-1)^2)/2), range(-4 6) clp(solid)) ///
(function y =  1/(sqrt(2*_pi))*exp(-((x-2)^2)/2), range(-4 6) clp(dash)) ///
(function y =  1/(sqrt(2*_pi))*exp(-((x-3)^2)/2), range(-4 6) clp(dot)) ///
, legend(lab(1 "mu==1") lab(2 "mu=2") lab(3 "mu = 3")) ///
  scheme(s1mono)
```



5. Ermitteln Sie $\ln f(\mu, y_i)$:

$$f(\mu, y_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(y_i-\mu)^2}{2}\right)$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\ln f(\mu, y_i) &= \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(y_i-\mu)^2}{2}\right)\right) \\
&= \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{-(y_i-\mu)^2}{2}\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\exp\left(\frac{-(y_i-\mu)^2}{2}\right)\right) \\
&= -n \ln\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2
\end{aligned}$$

6. Ermitteln Sie: $\frac{\partial \ln[f(\mu, y_i)]}{\partial \mu}$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln[f(\mu, y_i)]}{\partial \mu} &= \frac{\partial - n \ln \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} \sum (y_i - \mu)^2}{\partial \mu} \\
&= \frac{\partial - n \ln \sqrt{2\pi}}{\partial \mu} - \frac{\partial \frac{1}{2} \sum (y_i - \mu)^2}{\partial \mu} \\
&= 0 - \frac{1}{2} \sum \underbrace{2(y_i - \mu) \times -1}_{chain-rule!} \\
&= -\frac{1}{2} \sum -2(y_i - \mu) \\
&= \sum y_i - n\mu
\end{aligned}$$

Setze $\frac{\partial \ln[f(\mu, y_i)]}{\partial \mu} = 0$ und löse für μ

$$\begin{aligned}
0 &= \sum y_i - n\mu \\
n\mu &= \sum y_i \\
\mu &= \frac{1}{n} \sum y_i = \bar{y_i}
\end{aligned}$$